MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Institutionen för matematik och fysik

Problemlösning, kontext och kompetens

(Problem solving, context and competence)

Linda Ahl

Examensarbete för lärarexamen
i kunskapsområdet matematik
VT 2007

Handledare: Andreas Ryve

Examinator: Andreas Ryve

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Institutionen för matematik och fysik

Examensarbete för lärarexamen
i kunskapsområdet matematik
MY1030, 10 poäng

SAMMANFATTNING

Linda Ahl

Problemlösning, kontext och kompetens

2007 Antal sidor: 26

Syftet med arbetet är att undersöka hur matematiklärarstudenter ska introducera problemlösning för sina elever och vad som påverkar studenternas tolkningar av problem. Jag har även undersökt vilka kompetenser studenterna anser att en matematiklärare behöver ha för att genomföra en framgångsrik undervisning i matematik genom problemlösning. I undersökningen diskuterar tre grupper med matematiklärarstudenter hur de ska introducera ett problem för eleverna och vilka kompetenser de anser att en matematiklärare behöver ha för att undervisa i matematik genom problemlösning. Resultaten visar att studenterna har olika strategier för att introducera problemlösning för eleverna och att studenternas tolkningar av problemet påverkar introduktionen. Studenterna gör olika tolkningar av problemet beroende av i vilken kontext de tolkar problemet. De har ingen enhetlig bild av vilka kompetenser som krävs av en matematiklärare, för att genomföra en undervisning som svarar mot skolverkets mål.

Nyckelord: Matematik Problemlösning Kontextualisering Lärarstudenter

Förord: Jag tackar fil. dr. Andreas Ryve för utmärkt handledning.

Innehållsförteckning

1 Inledning

Skolverkets styrdokument slår fast att jag i min framtida yrkesutövning som matematiklärare måste ha kompetens[1] att undervisa matematik genom problemlösning. Problemlösning i matematik är något som lyfts fram i Skolverkets kursplaner. Under rubriken ”Ämnets karaktär och uppbyggnad” beskrivs denna som en av fyra viktiga aspekter som ska genomsyra undervisningen:

> Problemlösning, kommunikation, användning av matematiska modeller och matematikens idéhistoria är fyra viktiga aspekter av ämnet matematik som genomsyrar undervisningen. (Skolverket, 2000c)

Under mål att sträva mot för gymnasieskolan står att:

> Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna
> ---
> utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,
> ---
> utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,
> ---
> utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbildning samt formulera och motivera olika former av problemlösning,
> ---
> utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller. [Understrykningarna ingår ej i originaltexten.] (Skolverket, 2000c)

Problemlösning har en central plats även i grundskolans kursplan. Under rubriken ”Ämnets karaktär och uppbyggnad” står att:

> Problemlösning har alltid haft en central plats i matematikämnet. […] För att framgångsrikt kunna utöva matematik krävs en balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer. Detta gäller alla elever, såväl de som är i behov av särskilt stöd som elever i behov av särskilda utmaningar. [Understrykningarna ingår ej i originaltexten.] (Skolverket, 2000a)

Mot denna bakgrund vill jag reflektera över vad jag har fått med mig från min utbildning på Mälardalens högskola. Har jag tillräckliga kunskaper för att genomföra en matematikundervisning som svarar mot Skolverkets mål? I arbetet med denna undersökning hoppas jag att mina egna brister och förtjänster ska bli tydliga för mig. Denna självkännedom kommer jag att ha som utgångspunkt för min framtida kompetensutveckling.

---

[1] kompetens = förmåga att klara av en uppgift, skicklighet, behörighet

Min förhoppning är vidare att detta arbete ska inspirera aktiva lärare till att låta problemlösning utgöra en stor del av matematikundervisningen. Problemlösning har en stor potential när det gäller att få eleverna att se samband mellan olika matematiska områden, (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005). Ett väl konstruerat problem utmanar och motiverar såväl svaga som starka elever. Det ger eleverna möjlighet att tänka kreativt och fördjupa sin begreppsförståelse.

För forskningen inom matematikdidaktik[2] är det intressant att se hur aktuella forskningsresultat förmedlas till matematiklärarstudenter. Forskningen inom matematikdidaktik har inget egenvärde. Den blir endast meningsfull om den används för att förbättra undervisningen för såväl elever som matematiklärarstudenter. De nyutbildade lärarna har möjlighet att kanalisera ny kunskap och nya forskningsrön till skolan. Därför är det av största vikt att aktuell forskning är en naturlig del av matematiklärarutbildningen. Under processen med detta arbete har jag bl.a. kommit i kontakt med kontextualiseringsprocessen (Halldén, 1999; Nilsson, 2006), begreppsliga ramverk (Ryve, 2006), didaktiska klyftan (Bergsten & Grevholm, 2004) och mycket mer som jag kommer att använda i min framtida yrkesutövning. Om jag inte hade valt att inrikta mitt examensarbete på problemlösning, kontext och kompetens är det mycket tveksamt om jag hade tagit del av all den intressanta kunskap som nu har korsat min väg.

Bland mycket annat har jag fått upp ögonen för att om eleverna svarar fel beror det ofta på situationen och de kommunikativa spelreglerna (Schoultz, 2002). Eleverna tolkar helt enkelt inte frågor, uppgifter och problem i samma kontext[3] som läraren och då blir det ’fel’ (Halldén, 2002). För att som lärare möta eleverna där de befinner sig måste man sätta sig in i de tolkningar eleverna kan tänkas göra när de ställs inför ett problem. För att undersöka hur blivande matematiklärare skulle kunna introducera problemlösning för eleverna och hur de tolkar problemet har jag spelat in gruppdiskussioner där matematiklärarstudenter diskuterar:

- Hur de ska introducera ett speciellt problem för elever.
- Vilka kompetenser de anser att en matematiklärare måste ha för att lyckas med undervisning genom problemlösning.

1.1 Syfte

Syftet med arbetet är att undersöka hur matematiklärarstudenter skulle introducera problemlösning för sina elever och vad som påverkar studenternas tolkningar av problem. Jag vill även undersöka vilka kompetenser studenterna anser att en matematiklärare behöver ha för att genomföra en framgångsrik undervisning i matematik genom problemlösning.

[2] Didaktik är den del av undervisningsvetenskapen som behandlar läroplansteoretiska aspekter, d.v.s. undervisningsinnehåll, och fenomenografiska aspekter, d.v.s. elevers/studenters hantering och behandling av innehållet i undervisningen (Lindh, föreläsning 2007) .
[3] Med *kontext* menas i denna uppsats *en individs tolkning av en situation*.

1.2 Frågeställningar

1. Hur resonerar lärarstudenterna angående introduktionen av ett problem för eleverna?
2. Hur resonerar lärarstudenterna angående vilka kompetenser en lärare som ska undervisa i matematik genom problemlösning behöver?
3. Vilka tolkningar av problemet gör lärarstudenterna?

1.3 Disposition

Kap. 2 innehåller en forskningsbakgrund på området problemlösning. Där beskriva Pòlyas (1985 [1945]) modell för problemlösning som en process i fyra steg och de kompetenser som enligt Schoenfeld (1992) krävs för att lyckas med problemlösning.

Kap. 3 innehåller de teoretiska ramverk mot vilka jag analyserar mina resultat. Dessa är kontextualiseringsprocessen, som beskriver vad som påverkar individers tolkningar av olika situationer och forskning om vilka kompetenser en matematiklärare behöver för att lyckas med sin undervisning. Där beskrivs även den didaktiska klyftan i den svenska lärarutbildningen.

Kap. 4 beskriver hur och i vilken situation undersökningen genomfördes samt vilka problem jag har sett att min metod har. Där finns också en problemanalys som beskriver vilka olika tolkningar av problemet som är möjliga.

Kap. 5 innehåller en analys av de delar av gruppdiskussionerna som jag anser är intressanta för undersökningen. Här används kontextualiseringsprocessen som analytiskt verktyg för att strukturera resultaten. De kompetenser som lärarstudenterna anser är nödvändiga för att undervisa matematik genom problemlösning struktureras under matematiska kunskaper, kunskap om studenterna och undervisningskunskap.

Kap. 6 besvarar mina frågeställningar och beskriver vilka slutsatser jag har kommit fram till i relation till mitt syfte.

Kap. 7 diskuterar mina slutsatser i relation till de tankegångar som redovisas i inledningen. Här diskuteras bland annat den didaktiska klyftan i lärarutbildningen på Mälardalens högskola.

2 Bakgrund

I detta avsnittet kommer jag att beskriva tidigare forskning inom problemlösningsområdet. Jag har valt att beskriva två teorier som är mycket använda som referenser inom forskning om problemlösning. Den ena är Pòlyas (1985 [1945]) teori om problemlösningsprocessen och den andra är Schoenfelds (1992) fem kompetenser som krävs för lyckad problemlösning.

2.1 Problemlösningens faser enligt Pòlya

En klassiker i problemlösningssammanhang är Pòlyas (1985 [1945]) beskrivning av problemlösning som en process med fyra faser. Det är en problemlösningsmall som alla lärare och elever kan ha nytta av att känna till och använda vid behov. De fyra faserna är att:

1. förstå problemet
2. göra en plan
3. genomföra planen
4. se tillbaka och kontrollera resultatet.

I första steget identifierar problemlösaren vad som söks i problemet. Vad är det man vill ha reda på? Vilken information finns? Vad är givet? I steg två skall problemlösaren fundera över om hon har löst ett liknande problem någon gång. Vilka tidigare erfarenheter och kunskaper har hon. Hur skall hon stegvis gå tillväga för att nå lösningen? I den tredje punkten genomförs planen. Det är viktigt att varje steg fram till lösningen motiveras och kontrolleras. Steg fyra är det steg som har allra mest potential för att öka elevernas kunskaper. Trots det är det. enligt Hagland, Hedrén & Taflin (2006), en fas som ofta slarvas bort. Genom att se tillbaka på lösningen ges tillfälle att reflektera över den. Eleverna bör bedöma om svaret är rimligt och kontrollera svaret genom att lösa uppgiften på något annat sätt. Eleven bör fråga sig om det finns något snabbare och enklare sätt att lösa problemet. Hon bör leta efter matematiska samband som kan komma till nytta vid framtida problemlösning. Här har läraren en viktig roll. Läraren skall hjälpa eleverna att ställa rätt frågor om problemet.

2.2 Schoenfelds fem kompetenser

En problemlösare behöver enligt Schoenfeld (1992) fem kompetenser för att klara av att lösa problem. Först och främst krävs en *kunskapsbas.* Kunskapsbasen består av kunskaper inom matematiska områden. Hit räknas kunskap om begrepp och algoritmer men också matematisk intuition och känsla. Problemlösaren behöver också *heurustik.* Den innebär att hon känner till och kan använda en eller flera metoder och strategier som passar för att lösa problemet. För att inte blanda ihop olika led i lösningen behöver problemlösaren *kontroll* över processen. Hon behöver ha förmåga att hålla fast vid sina tankegångar. Dessutom måste hon tro på sin egen förmåga att klara av att lösa problemet. Dessa förväntningar på sig själv och matematiken kallas *föreställning/tilltro.* Sist men inte minst krävs *praktik.* Problemlösaren behöver en träning som socialiserar henne in i gynnsamma metoder att tänka och angripa problem.

3 Teori

I teoriavsnittet förtydligar jag vad som menas med ett problem. Därefter beskrivs kontextualiseringsprocessen. Jag beskriver även vilka kompetenser en matematiklärare behöver ha för att ha förutsättningar att lyckas med undervisning genom problemlösning. Mot dessa teorier speglar jag i analysen resultaten av min undersökning med lärarstudenterna. För att undvika förvirring vill jag påpeka att problemlösning är ett av Skolverket fastlagt inslag i matematikundervisningen. Alla kompetenser som gäller matematikundervisning i allmänhet gäller även för undervisning genom problemlösning.

Kunskapssynen i detta arbete är socialkonstruktivistisk. Kunskap byggs upp inom varje människa genom bearbetning av ny information, mot hennes tidigare erfarenheter. Kontexten[4] och den sociala interaktionen är mycket viktiga för byggandet av ny kunskap. Men i motsats till den sociokulturella kunskapssynen (Säljö, 2003) som hävdar att situationen är den starkaste faktorn för inlärning, så menar socialkonstruktivisterna att individen spelar en större roll för inlärningen är situationen (Halldén, 1999).

3.1 Problem

> Genom att arbeta med problem kan eleverna utveckla sin förmåga att tänka såväl kreativt och självständigt som logiskt, systematiskt och strukturerat. Utmaningen att lösa problem kan även i sig öka elevers lust att arbeta med matematik och motivera dem att lära sig mer. (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005, s.13)

Innan vi går in på kontextualiseringsprocessen vill jag klargöra vad som är ett problem. En uppgift där eleven har en färdig lösningsmetod är en uppgift. Om eleven däremot saknar en färdig lösningsmetod för uppgiften har hon ett problem att lösa. Samma uppgift kan därför vara ett problem för en elev och en uppgift för en annan! (Halldén, Scheja & Haglund, under tryckning) Särskilt intressanta problem kallas *rika problem.* Vissa kriterier måste enligt Hagland, Hedrén & Taflin (2005, s.28 - 30) vara uppfyllda för att ett problem skall få kallas rikt:

1. Problemet skall introducera viktiga matematiska idéer eller vissa lösningsstrategier.
2. Problemet[5] skall vara lätt att förstå och alla skall ha möjlighet att arbeta med det.
3. Problemet skall upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.
4. Problemet skall kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och representationer.
5. Problemet skall kunna initiera en matematisk diskussion utifrån elevernas skilda lösningar, en diskussion som visar på olika strategier, representationer och matematiska idéer.
6. Problemet skall kunna fungera som brobyggare mellan olika matematiska områden.
7. Problemet skall kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.

---

[4] Med *kontext* menas i denna uppsats *en individs tolkning av en situation*.

[5] Läs: Problemformuleringen

I introduktionen av ett problem är det viktigt att alla elever förstår vad problemet handlar om och går ut på, utan att läraren ger några anvisningar för hur problemet ska lösas (Hagland m. fl., 2005). Eleverna ska ges möjlighet att själva närma sig problemet. Läraren ska inte ta ifrån eleverna initiativet.

3.2 Kontextualiseringsprocessen

När en matematiklärare ger sina elever en uppgift vet hon svaret på uppgiften. Om en elev inte svarar som läraren har tänkt sig har han eller hon svarat fel! Eller? För att lösa ett problem krävs att problemet tolkas. Hur problemet tolkas beror inte bara på hur det framställs utan också på i vilken situation det framställs och vilka tidigare erfarenheter problemlösaren har (Halldén, 2002). Hagland m.fl. (2005) beskriver ett tydligt exempel på hur tolkningar av uppgifter kan leda till att eleverna kommer fram till svar som förvånar lärarna. Så här var uppgiften formulerad:

32 Ahlgrens bilar kostar 10 kr Hur många bilar får man för 25 kr?

Läraren förutsätter att eleverna ska utföra en enkel räkneoperation och multiplicera 32 med 2,5, för att komma fram till svaret 80 bilar. Till lärarens förvåning svarar en elev att man får 64 bilar. Eleven tolkade att en påse innehåller 32 bilar. Eftersom det inte är rimligt att riva sönder en påse och plocka ut det antal bilar man vill ha, så får man nöja sig med att köpa hela påsar. Alltså räcker pengarna till två påsar!

Kontext är ett begrepp som har olika innebörd för olika människor. Här betyder kontext individens tolkning av en situation. För att beskriva hur viktig kontexten är finns ett välanvänt exempel som ursprungligen användes av Kahneman och Tversky (1982). Senare har även Halldén (1999) och Scheja (2006) använt samma exempel för att studera kontextens betydelse. (Beskrivet i Hállden, Scheja & Hagland, under tryckning; Nilsson, 2006) Här följer exemplet (fritt översatt av författaren):

> Linda är 31 år, singel, utåtriktad och väldigt smart. Hon har studerat filosofi. Som student var hon djupt engagerad i frågor om diskriminering och social rättvisa. Hon deltog även i demonstrationer mot kärnkraft.
>
> Vilken av följande uttalanden om Linda är mest sannolikt?
> A. Linda är bankkassörska.
> B. Linda är bankkassörska och aktiv feminist.

Den första studien av Kahneman och Tversky resulterade i det kvantitativa resultatet att majoriteten av de tillfrågade svarade att alternativ B var mest sannolikt. Detta trots att det inte krävs några djupgående kunskaper i sannolikhetslära för att räkna ut att <u>en</u> händelse, Linda är bankkassörska, är långt mer sannolikt än <u>två</u> händelser i konjunktion med varandra, Linda är bankkassörska <u>och</u> aktiv feminist.

De andra studierna av Halldén (1999) och Scheja (2006) intresserade sig för varför de tillfrågade svarade fel på en enkel uppgift. De kom fram till att de tillfrågade uppfattade olika sorters sannolikhet. Matematiskt är alternativ A mest sannolikt, men av erfarenhet vet de tillfrågade att informationen i uppgiften sannolikt ska leda dem till svaret. Att bortse från att Linda som student var djupt engagerad i frågor om diskriminering och social rättvisa samt demonstrerade mot kärnkraft verkar osannolikt. Därför väljs alternativ B. Tolkningen av situationen, kontexten, leder de tillfrågade till fel svar. (Halldén m.fl. under tryckning) Följaktligen kan man tala om kontextualisering som en sammansatt process där den kognitiva aktiviteten växlar mellan tolkningar och reflektioner av den sammanhängande helheten och den centrala händelsen. (Halldén 1999; Nilsson, 2006)).

En uppdelning i tre delkontexter underlättar användandet av kontexualiseringsprocessen som ett analytiskt verktyg. (Halldén, 1999; Nilsson, 2006):

1. Den begreppliga kontexten.
2. Den situerade kontexten.
3. Den kulturella kontexten.

Det matematiska språket är uppbyggt av entydigt definierade begrepp. Om den exakta betydelsen av begreppen saknas kommer eleverna/studenterna att göra sina egna tolkningar av begreppen (Säljö & Wyndham, 2002). Den begreppsliga kontexten innehåller personliga tolkningar av begrepp som ingår i studiesituationen. Eleverna behöver en referensram inom vilken de aktuella begreppen ingår. Här finns en paradox, inlärningsparadoxen:

> Menon säger till Platon: Om vi vet vad rättvisa är behöver vi inte söka efter den, men om vi inte vet vad rättvisa är, hur skall vi då veta när vi funnit den?

För att förstå referensramen måste eleverna känna till de begrepp som bygger upp den. För att tillägna sig begreppsförståelse behövs en referensram inom vilken begreppen existerar, men för att förstå referensramen måste eleverna känna till de begrepp som bygger upp den… (Halldén, 2002). Så har vi hamnat i ett klassiskt moment 22. Utbildningsparadoxen är med facit i hand inte ett oöverstigligt hinder. Eftersom vi vet att eleverna kan tillägna sig både begrepp och referensramar kan vi dra slutsatsen att begreppen och ramverken utvecklas sida vid sida. Det är dock viktigt att komma ihåg paradoxen när man som lärare analyserar varför en elev har misslyckats med att tolka ett problem i rätt kontext.

I den situerade kontexten ingår interaktionen mellan individer och den omedelbara omgivningen där inlärning sker (Nilsson, 2006). Här finns en konflikt mellan vetenskapliga begrepp och ett mer vardagligt sätt att tolka problem. I exemplet med Linda syns den situerade kontexten tydligt. I stället för att tolka exemplet i ett matematiskt sannolikhetstänkande tolkar majoriteten av de tillfrågade exemplet med vardagligt sunt förnuft. Linda framställs som en engagerad och aktiv samhällsmedborgare. Det verkar därför högst sannolikt att hon är aktiv i feministrörelsen.

Den kulturella kontexten refererar till normer och traditioner i vilka tolkningen av uppgifter ska passas in (Nilsson 2006). Linda i exemplet är singel. Här finns det anledning att misstänka att våra kulturella normer leder de tillfrågade mer än de själva är medvetna om. Varför är en utåtriktad, smart tjej singel i en kultur där tvåsamhet är en norm? Är hon kanske homosexuell? Hatar hon män? Det är klart att en sådan kvinna är aktiv i feministrörelsen! Föreställningar som skapas av kulturella normer finns alltid med när vi betraktar vår omvärld, vare sig vi är medvetna om dem eller inte.

3.3 Kompetenser som krävs för att lyckas med undervisning i matematik genom problemlösning

Problemlösning är en del av matematikämnet. De kompetenser som krävs för att undervisa matematik i allmänhet gäller även för undervisning genom problemlösning. En matematiklärare behöver kunna allt det som eleverna ska lära sig och mycket mer för att lyckas med sin undervisning (Ryve, 2006). Elevernas undervisning syftar till lära dem begreppsförståelse, förmåga att koppla samman begrepp och matematiska metoder till en helhet och att representera matematiska idéer på flera olika sätt. De ska bli säkra på sina arbetssätt och metoder, utveckla ett logiskt tänkande, bli duktiga på problemlösning, abstrakta resonemang och utveckla ett positivt förhållningssätt till matematiken som en vetenskap som är viktig för både samhället och dem själva. En matematiklärare behöver dessutom ha:

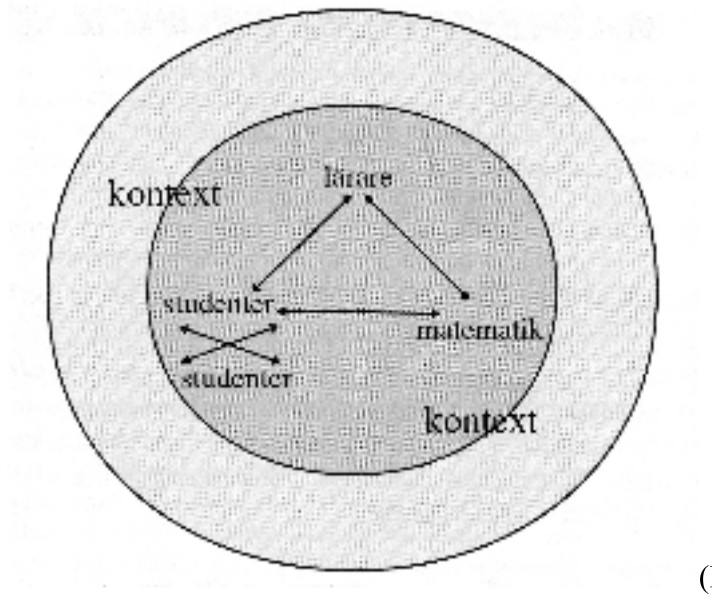
- matematisk kunskap,
- kunskap om studenterna och
- undervisningskunskap.

Den matematiska kunskapen innebär, förutom alla de matematiska kunskaper som eleverna ska tillägna sig, en djup kunskap om begreppens innebörd och definitioner (Ryve, 2006). Hit räknas även förmågan att se hur matematiska idéer inom en disciplin hänger samman med andra matematiska discipliner. Kunskapen om studenterna innebär att läraren dels behöver kunskap om de enskilda individernas tidigare kunskaper, dels om studenters lärprocess i allmänhet. I undervisningskunskapen ingår kännedom om styrdokumentens mål och hur man planerar, implementerar och utvärderar sin undervisning för att uppnå målen. En lärare behöver kort sagt veta *hur*, *när* och *varför* i all sin undervisning. Problemlösning ställer särskilt höga krav på både lärarens ämneskunskaper och didaktiska kunskaper. Ämneskunskaperna ska vara så befästa att läraren har förmåga att upptäcka när eleverna närmar sig ett mönster, ett generellt samband eller en generell lösning. Den didaktiska kunskapen krävs bland annat för att ställa rätt fråga eller ge rätt ledtråd till elever som kört fast, utan att servera lösningen.

Kilpatrick, Swafford, & Findell (2001) beskriver en modell av undervisningssituationen i form av en triangel. Läraren, eleverna och matematiken befinner sig i varsitt hörn. Mellan dem sker den interaktion som är själva undervisningen. Lärarens kunskaper, beslut och handlingar spelar självklart stor roll, men även elevernas förväntningar, intresse och kunskaper formar undervisningen. Elevernas olika tolkningar av uppgifter leder till olika sätt att ta sig an uppgifterna. Läraren kan hantera detta på olika sätt. En del märker inte att eleverna gör olika tolkningar. Andra noterar att så är fallet utan att närmare undersöka vad det beror på. De upprepar sin egen tolkning till dess eleverna överger sin tolkning. Uppmärksamma lärare använder elevernas tolkningar när de planerar nästa steg i sin undervisning.

Allt fler studier visar att elever lär sig bäst när de får arbeta med rika problem (Kilpatrick m. fl. 2001). Detta arbete utvecklar både begreppsförståelsen och den matematiska kunskapsbasen. Läraren bör dock akta sig för två saker som kan stjälpa alla goda intentioner med undervisning genom problemlösning. Det första är att ge efter för elevernas önskan att få strikta order om hur de ska gå tillväga för att nå lösningen. Om läraren serverar en arbetsgång och metod missar man möjligheten att låta eleverna komma till egna insikter. Det andra är att läraren inte har tålamod att vänta ut krångliga lösningar. Istället för att ge eleverna tid att komma till slutet av sina tankegångar och uträkningar, visar läraren ett enklare sätt att lösa problemet. Båda dessa lärarstrategier förstör grundidéen med problemlösning. Meningen är att eleverna själva ska utforska och fördjupa sina matematiska kunskaper. Lärarens uppgift är att guida eleverna vidare, utan att ta ifrån dem initiativet. Att utveckla sin begreppsförståelse, att se samband mellan olika matematiska områden och finna generella samband tar tid. Att ge eleverna tid är att ge dem möjlighet att lära.

Inlärningens triangel:
Inlärning som interaktion mellan lärare, studenter och matematik i sin kontext



(Kilpatrick s.314, 2001, fritt översatt)

Figur 1 Inlärningens triangel. En modell av inlärning som interaktion mellan lärare, studenter och matematik i sin kontext.

3.4 Den svenska matematiklärarutbildningen

I den svenska matematiklärarutbildningen har staten länge försökt att komma tillrätta med ett stort problem som kallas den didaktiska klyftan (Bergsten & Grevholm, 2004). De blivande lärarna bör beredas möjlighet att integrera sina kunskaper från olika matematiska områden med kunskaper om hur man undervisar. När denna integrering uteblir uppstår en didaktisk klyfta mellan ämneskunskaper och pedagogiska kunskaper. Den didaktiska klyftan i lärarutbildningen har nått sitt djup genom tre polariserade konflikter. Redan från början finns en spänning mellan tradition och förnyelse. Både högskolornas organisation och sammansättning av personalen är inordnade i redan befintliga system. För att förnya och förändra utbildningen krävs genomgripande förändringar av systemen. Stora förändringar är arbetskrävande och därför är det svårt att implementera en förnyad utbildning som strävar efter att överbrygga den didaktiska klyftan. Ett försök gjordes år 1998, när lärarutbildningen förändrades för att bättre passa den nya läroplanen från år 1994. Redan då fanns intentioner att överbrygga den didaktiska klyftan, men inte mycket förändrades genom reformen dels på grund av spänningen mellan tradition och förnyelse, dels på grund av en spänning mellan erfarenhetsbaserad kunskap och vetenskaplig kunskap. Före år 1977 bedrevs nästan all lärarutbildning, mot lägre åldrar, av erfarna lärare utan forskningserfarenhet inom sina ämnen.

Undervisningen fokuserade på vad som skulle läras ut. Blivande lärare för de senare åren och gymnasieskolan undervisades av akademiskt skolade ämneslärare utan undervisningserfarenhet utanför högskolan/universitetet och utan pedagogisk utbildning. När utbildningen mot de lägre åldrarna, genom en reform år 1977, blev en del av universitetets organisation uppstod en spänning mellan erfarenhetsbaserad kunskap och vetenskaplig kunskap. Konflikten om vilken kunskap som är viktigast finns fortfarande kvar i lärarprogrammen. Det är en bidragande orsak till den didaktiska klyftan. Sist men inte minst tvistas det om hur stor del av utbildningen som skall vara praktisk och hur stor del som ska vara teoretisk.

Den didaktiska klyftan handlar om vad som är en lämplig avvägning mellan ämneskunskaper och pedagogiska kunskaper. Knäckfrågan är hur man organiserar en utbildning som skall ge lärarstudenterna integrerade kunskaper om matematikämnet, kunskap om elevernas lärprocesser och en god undervisningsteknik.

Innehållet i den svenska matematiklärarutbildningen diskuteras vanligtvis i kvantitativa termer om hur många högskolepoäng som anses lämpligt för att nå tillräcklig kompetens. Ryve (2007) menar att den diskussionen måste kompletteras med en kvalitativ aspekt som syftar till att klargöra vad som ska inkluderas i lärarutbildningen. Ryves (2007) forskning *Approaching Mathematical Discourse: Two analytical frameworks and their ralation to problem solving interactions* visar att om undervisningen bedrivs utan att studenterna har det aktuella begreppliga ramverket[6] tillgängligt så blir undervisningen svårbegriplig för studenterna. De begreppsliga ramverken behövs för att fokusera matematiska diskussioner så att studenterna kan gå från att kunna använda matematiska regler till att förstå varför de faktiskt fungerar, s.k. meta-shift. Utan adekvata begreppsliga ramverk riskerar undervisningen att bli en gissningslek där studenterna gissar vad läraren vill att de ska lära sig. Begreppsliga ramverk är därför viktiga för undervisningen i alla åldrar.

3.5 Sammanfattning

Jag kommer att använda kontextualiseringsprocessen för att strukturera analysen och placera mina resultat i ett sammanhang Kontextualiseringsprocessen beskriver hur och varför problem kan tolkas i olika referensramar. De lärarkompetenser som enligt forskningen är nödvändiga för en lyckad undervisning i matematik kommer att jämföras med matematiklärarstudenternas egna uppfattningar om vilka kompetenser som krävs för att lyckas med sin undervisning. En lärare behöver kort sagt veta *hur, när* och *varför* i all sin undervisning. Den didaktiska klyftan är namnet på den företeelse som innebär att ämneskunskaper och pedagogiska kunskaper uppfattas som isolerade enheter istället för som en integrerad helhet. Mina slutsatser kommer diskuteras i relation till den didaktiska klyftan.

---

[6] Ett begreppligt ramverk är betydelsen av och sambanden mellan de begrepp som bygger upp en matematisk disciplin, t.ex. algebra.

4 Metodologi

Det här avsnittet beskriver hur undersökningen genomfördes, i vilken kontext den genomfördes och vilka problem jag har sett att metoden har.

Undersökningen genomfördes under en matematiklektion för matematiklärarstudenter på Mälardalens högskola. Kursen ingår i senare delen av den termin som kallas B-blocket för matematiklärare. De studenter som utbildar sig för senare år på grundskolan avslutar sin matematikutbildning med B-blocket. De studenter som ämnar bli gymnasielärare läser även ett C-block, under ytterligare en termin. Ungefär hälften av studenterna planerade att läsa C-blocket.

Nio studenter i tre lika stora grupper deltog i undersökningen. Grupperna bestod av både kvinnor och män. Jag använde redan befintliga grupper då kursen hade ett regelbundet inslag av grupparbeten. Det såg jag som en fördel eftersom man kan anta att studenterna känner sig trygga i sina ordinarie grupper, de var vana att diskutera matematik med varandra. Deras gruppdiskussioner spelades in på band. De tre grupperna arbetade parallellt och jag cirkulerade inledningsvis mellan grupperna för att se till att de kommit igång och att bandspelarna fungerade. Därefter följde jag diskussionen i en grupp, grupp 3. Studenterna deltog frivilligt. De informerades om att deltagandet var strikt konfidentiellt och att de när som helst kunde avbryta. Problemet och följdfrågorna delades ut på papperskopia till alla studenter. De studenter som inte deltog i undersökningen arbetade med samma problem:

- Hur skulle ni introducera problemet för eleverna?
- Försök att enas om tre kompetenser hos läraren som är nödvändiga för att undervisa matematik genom problemlösning.

Glassarna
Lisa ska köpa lösglass i kulor och kan välja på fyra olika smaker. Hon vill ha två glasskulor.

a) På hur många olika sätt kan hon välja sin glass?
b) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Frågorna är formulerade i linje med två av mina frågeställningar. Jag valde att inte ställa en direkt fråga om min tredje frågeställning – Vilka tolkningar av problemet gör lärarstudenterna? – eftersom lärarstudenterna behöver tolka problemet för att planera sin introduktion.

Jag valde att spela in gruppdiskussioner för att jag ville höra hur lärarstudenterna resonerade med varandra. Om jag hade valt att låta studenterna besvara frågorna en och en hade jag gått miste om deras möjligheter att utveckla sina tankar i interaktion med andra. Gruppdiskussionerna transkriberades i sin helhet. Vissa små justeringar av språket har gjorts för att underlätta läsningen. De delar av diskussionerna som jag anser belyser mina frågeställningar finns återgivna och analyserade under avsnitt 5 ”Analys och resultat”.

4.2 Undersökningens situation

De studenter som utbildade sig för att undervisa i senare år var sånär som på några veckor färdiga med sina matematikkurser. De som ska bli gymnasielärare läser ytterligare en termin matematik. Kursen som undersökningen genomfördes i var *Diskret matematik med didaktik.*

Studenterna befann sig i slutet av den grundläggande kombinatoriken. Deras aktuella begreppsliga ramverk var kombinatorik. De hade lektionen före undersökningstillfället arbetat med antalet urval av k element bland n stycken, n över k, som är den generella lösningen till tolkning A.

Jag har själv gått kursen *Diskret matematik med didaktik,* för samma lärare, under min utbildning. Mina närmaste studiekamrater och jag upplevde att läraren på ett tydligt och lättsamt sätt ledde oss genom den diskreta matematikens mysterier. Ett citat av min gode vän, x, beskriver lärarens, y, insats väl: ”Y lär oss en massa saker i smyg, utan att man ens märker det!” Läraren planerade undervisningen på ett engagerande sätt som inte kändes betungande för den något late x. Det finns därför all anledning att tro att studenterna hade fått god undervisning i *Diskret matematik med didaktik*.

Undersökningen inleddes med att jag beskrev mitt examensarbete. Jag förklarade att jag var intresserad av problemlösning, kontext och de kompetenser en matematiklärare behöver ha för att undervisa genom problemlösning. Jag förklarade skillnaden mellan problem och uppgift och vad kontext innebär. Genom att vara tydlig med innehållet i examensarbetet hoppades jag att studenterna skulle vägledas att diskutera problemet inom ramen för mitt arbete. En grupp satt kvar och arbetade i klassrummet, en grupp satt själva i ett annat klassrum och den tredje gruppen satt ostörda utanför klassrummet. Grupperna hade ca 30 minuter på sig.

4.3 Metodproblem

De tre grupperna arbetade samtidigt. Eftersom det är omöjligt att vara på tre ställen samtidigt valde jag att följa en grupp mer än de andra. Det är möjligt att jag hade fått en mer nyanserad bild av diskussionerna om jag hade kunnat observera samtliga grupper. Det är också möjligt att min konstanta närvaro hade stört studenternas samtal och att de hade lättare att diskutera utan åhörare.

De tre grupperna fungerade mycket olika. Grupp 1 stängde av sin bandspelare när de diskuterade vilka kompetenser en lärare behöver för att undervisa matematik genom problemlösning. Därmed missade jag deras resonemang om kompetenser. Det är därför svårt att tyda hur deras tolkningar och tankegångar växte fram. Grupp 2 hade en väl fungerande diskussion där studenterna gav varandras tankar näring att utvecklas. Grupp 3 har svårt att nå en dialog. De talade ofta förbi varandra. Med det menar jag att uttalanden ofta lämnades utan respons från de andra studenterna.

Problemlösning kräver tid. Det tar tid att sätta sig in i och utforska ett problem. (Hagland m. fl., 2005; Kilpatrick, 2001) Detta gäller såväl för elever som för de lärare som ska undervisa genom problemlösning. Tiden att diskutera problemet var begränsad till 30 minuter. Resultaten hade kanske blivit annorlunda om studenterna hade fått arbeta utan tidsbegränsning.

4.4 Problemanalys

Som problem valde jag *Glassarna* ur *Rika matematiska problem* (Hagland m.fl., 2005). Det är mycket enkelt formulerat och samtidigt mycket innehållsrik. Problemet uppfyller alla kriterier för ett rikt matematiskt problem.

Glassarna
Lisa ska köpa lösglass i kulor och kan välja på fyra olika smaker. Hon vill ha två glasskulor.
a) På hur många olika sätt kan hon välja sin glass?
b) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Föreställ dig att du står vid luckan till en glasskiosk en varm sommardag. Personligen är jag stockkonservativ och tar alltid choklad – choklad. För mig är det uppenbart att man kan välja samma smak flera gånger. Jag föreställer mig vidare att kioskbiträdet pytsar i glasskulorna i den ordning de beställs. En beställning på en glass med blåbär – vanilj kommer att ha blåbär i botten och vanilj överst. Trots detta har jag svårt att tro att någon skulle reklamera glassen om den serverades med vanilj i botten och blåbär över! Det här är min vardagliga tolkning: Man kan ta samma smak två gånger och kulornas ordning saknar betydelse.

Studenterna i min undersökning förväntas ganska omgående ta ställning till tolknings-problemet om vanilj – päron är samma kombination som päron – vanilj och om det är tillåtet att välja två kulor av samma smak. Det finns fyra olika sätt att tolka uppgiftsbeskrivningen:

A. Varje smak får väljas högst en gång till varje strut och kulornas ordning saknar betydelse.
B. Varje smak får väljas flera gånger till varje strut och kulornas ordning saknar betydelse.
C. Varje smak får väljas högst en gång till varje strut och kulornas ordning har betydelse.
D. Varje smak får väljas flera gånger till varje strut och kulornas ordning har betydelse.

När studenterna diskuterar sin introduktion kan de välja att låsa problemet till en tolkning eller att lämna det öppet för eleverna att tolka. Det är djärvare att lämna det öppet eftersom det öppnar för en större mångfald av lösningar och flera varianter av rätta svar. Tolkning A ger svaret 6 stycken glassar, B 10, C 12 och D 16.

Genom att utvidga antalet smaker från 4 till 5, 6, 7 till n st. smaker kan man söka ett generellt mönster för antalet kombinationer med 2, 3, 4, 5 och slutligen k st. kulor. Varje tolkning av problemet ger sitt specifika svar. För n st. smaker och k st. kulor kan följande generella regler härledas:

Tabell 1 Generella lösningar till de fyra möjliga tolkningarna av problemet Glassarna

Smak Ordning	Varje smak kan väljas högst en gång till varje strut	Varje smak kan väljas flera gånger till varje strut
Kulornas ordning saknar betydelse	A $\binom{n}{k}$	B $\binom{n+k-1}{k}$
Kulornas ordning har betydelse	C $\frac{n!}{(n-k)!}$	D n^k

4.4.1 Exempel på barns problemlösningsprocesser

Det finns flera sätt att angripa problemet. Här följer några exempel på lösningar av tolkning A ur Hagland m. fl. (2005). Tolkning A innebär att samma smak inte får väljas två gånger. Kulornas ordning saknar betydelse, d.v.s. vanilj – choklad är samma som choklad – vanilj.

Ett sätt att angripa problemet är att utan system para ihop glassmaker till möjligheterna verkar vara uttömda. Till sin hjälp kan barnen t.ex. använda färgade pappcirklar eller färgpennor. Ett annat sätt är att förkorta smakerna till sin initialbokstav och bilda par. T.ex. v - c för vanilj – choklad o.s.v. Ett mer logiskt resonemang kan se ut på många olika sätt. Gemensamt är att eleverna skapar någon form av system i kombinationerna. Ett mer systematiskt letande stöds av en bild, tabell eller ett träddiagram.

Genom ett systematiskt letande där barnen använder tabeller för att se vad som händer om man utökar antalet smaker, n, när antalet kulor är 2, bildar början till den generella regeln för hur man beräknar en aritmetisk talföljd. Barnen kan resonera så här:

> Ex.1 Om man har 4 smaker plussar man på med 3 till så många man hade när man hade 3 smaker. Om man har 5 smaker plussar man på med 4 till så många man hade när man hade 4 smaker. Så där gör man hela tiden. Man plussar på med ett mindre än så många smaker man har.

Det här resonemanget närmar sig en generell rekursionsformel: $S_{n+1} = S_n + n$; n tillhör Z_+

> Ex. 2 Om det är 4 smaker så plussar man ihop 3 + 2 + 1 och om det är 5 smaker plussar man ihop 4 + 3 + 2 + 1 och så vidare. Man startar alltid på talet före hur många smaker det är.

> Ex. 3 Man tar så många smaker det finns gånger en smak mindre. Senare tar man hälften av det man får då.

Det här resonemangen kan kombinerats till en formel för en aritmetisk talföljd:

$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = n*(n - 1)/2$; n tillhör Z_+

Om vi nu går över till att utöka antalet kulor, k, kommer vi att kunna härleda formeln för antalet delmängder av k element ur en mängd med n element.

$n(n - 1)(n - 2)*\ldots*(n - (k - 1))/k!$; $k \geq n$, n tillhör Z_+, som också kan skrivas $n!/k!\,(n - k)!$

Problemet beskrivs i litteraturen som tillämpbart ända ner i förskolan. För att pröva sanningshalten i detta påstående använde jag mina egna barn som försökskaniner. Saga, 8 år , och hennes bror Sackarias 6 år, löste tillsammans del a) i problemet. Eftersom Sackarias inte kan läsa, fick han problemet uppläst av Saga två gånger. De förstod ändå inte riktigt vad de förväntades göra, så det behövdes ytterligare förklaringar innan de kunde ta sig an problemet. Efter ett syskongräl om vilka smaker som är godast enades barnen om choklad, vanilj, banan och jordgubb. Sedan gick det som en dans!
Saga: Då tar man choklad i botten och sen de andra på, tre stycken. Så blir det lika för de andra, 3+3+3+3.

Sackarias: Det blir 12!
Jag: Är choklad – banan samma som banan – choklad?
Saga: Nej, de är lite olika eftersom i den ena är det choklad först och i den andra är det banan först.

Efter att de förstått problemet gick lösningen mycket snabbt. Färgpennor fanns till hands men användes inte. Barnen tolkade enligt alternativ C, banan – choklad är inte samma som choklad – banan, utan att överväga andra alternativ. Det är tydligt att även små barn kan arbeta med detta problem.

5 Analys och resultat

Här analyserar jag de delar av gruppdiskussionerna som jag anser är intressanta för undersökningen. För att göra analysen överskådlig använder jag kontextualiseringsprocessen. De lärarkompetenser som studenterna framhåller som nödvändiga för en lyckad undervisning genom problemlösning struktureras i tre kategorier av kompetenser: matematisk kunskap, kunskap om studenterna och undervisningskunskap.

Transkriberingen är systematiskt. Numreringen inom parentes finns för att underlätta syftningar till olika yttranden och idéer. Undersökningen gjordes i tre grupper, 1, 2, 3 med tre personer i varje grupp, A, B, C. I texten står 1A för grupp 1 person A o.s.v. Varje grupp består av två kvinnor och en man. För att skydda männens integritet refererar jag till samtliga studenter i femininform.

5.1 Grupp 1

Grupp 1 har läst igenom problemet. Bandspelaren slås på och de börjar diskutera hur de ska introducera problemet för eleverna:

(1) 1A: Vi kan rita upp olika glassorter för att kolla hur många kombinationer det finns. Vi kan intressera eleverna med fina teckningar, eller hur?
(2) 1B: Ja, det är bra att använda färger för då syns det bättre. Sen kan man få eleverna att bli aktiva och komma på vilka smaker det ska vara på det här.
(3) 1C: Fniss. Är det så?

Här är grupp 1 klara med sin introduktion. De reflekterade inte över att problemet inte bestämmer om man får välja samma smak två gånger eller om smakernas ordning har betydelse. Student 1A ritade ner en färgglad lösning som besvarar tolkning B: Varje smak kan väljas flera gånger till varje strut men kulornas ordning saknar betydelse. Denna tolkning ger 10 möjligheter att välja sin glass. Studenterna 1B och 1C accepterar 1A:s lösning utan att reflektera över andra möjligheter. Studenterna har nyligen arbetat med n över k, den generella lösningen till tolkning A, men ingen i gruppen tolkade problemet i kursens aktuella begreppsliga ramverk. Den är möjligt att den vardagliga utformningen av problemet, den situerade kontexten, påverkade deras tolkning. I stället för att resonera i matematiska, kombinatoriska termer, föreställer de sig hur det går till när man köper glass på riktigt. Antingen tar man två av samma smak, eller två olika smaker. Det är också möjligt att studenterna på grund av den kulturella kontext de befinner sig i har svårt att föreställa sig att problemet har fler lösningar än en. De är vana att arbeta med uppgifter som har en entydig lösning. Därför söker de inte efter fler lösningar när de väl har funnit en. Grupp 1 stänger av bandspelaren och enas om tre kompetenser.

(7) 1B: Vi har enats om tre kompetenser: Ett: Att man är bra och säker inom sitt ämne och kan förklara det man ska undervisa och kan svara på följdfrågor. Två: Tålamod, att försöka få alla elever att förstå och visa förståelse för elevernas kunskaper och frågor. Tre: Att presentera uppgifter på ett roligt sätt och använda exempel som är roliga och intressanta för elever och att ge bra ledtrådar när eleverna kört fast.

Studenterna har identifierat kompetenser som de tycker krävs för att lyckas med sin undervisning (7). Först tar de upp en del av den matematiska kunskapen, att man är bra och säker inom sitt ämne, och i samma mening även undervisningskunskap, att man kan förklara och svara på följdfrågor. Därefter tar de upp kunskap om studenterna och till sist mer undervisningskunskap.

5.2 Grupp 2

Nu går vi vidare till grupp 2 som funderar på hur de ska introducera problemet för eleverna. De har läst igenom problemet var för sig:

(8) 2A: Jahapp, hur skulle ni introducera problemet för eleverna? *Tystnad*. Ska vi göra problemet först eller?
(9) 2B: Ja, det är väl bäst. Så vi vet hur man gör och så vi kan visa dem hur de ska tänka själva.
(10) 2C: Ska vi rita en bild med de fyra olika smakerna?
(11) 2B: Du menar att man ser det framför sig, för då är det ju lättare liksom. Om de behöver hjälp då, för då är det ju lättare.
(12) 2C: De kanske kan klura ut det själva egentligen. Om de bara får bilden framför sig.
(13) 2B: Ja precis så de har någonting och ….
(14) 2A: Så du menar att vi ska rita bilder åt dem?
(15) 2B: Man kan ju rita på tavlan. Om ni skulle ha fyra olika smaker äpple, jordgubbe, vanilj och banan.
(16) 2A: Ja så kanske man kan göra. Kan man göra på något annat sätt?

Grupp 2 är i inledningen på sin diskussion inne på att de ska visa eleverna hur de ska tänka (9) men övergår snabbt till att det är bättre att låta eleverna tänka själva (12) med hjälp av en introducerande bild. Student 2A verkar inte riktigt överens (14) med 2B och 2C och efterlyser andra introduktionssätt (16). Då upptäcker 2C ett tolkningsproblem:

(17) 2C: Jag tänkte så här: Är äpple – päron samma sak som päron – äpple?
(18) 2B: Ja, jo men det är det. Det måste det ju vara.
(19) 2C: Ok, är det samma?
(20) 2A: Är det samma verkligen?
(21) 2B: Jo men så måste det ju vara. Äpple – päron måste ju vara samma som päron – äpple.
(22) 2A: Ja men äpple och päron, då är det äpple först. Tvärtom då äter man först päron och sen äpple.
(23) 2B: Det stod ju faktiskt inte hur det var!
(24) 2A: Nej. *Tystnad.* Tolkningsfråga kallas det.
(25) 2C: Man skulle ju liksom vilja lägga en; det kanske är för svårt för dem; att lämna problemet som det är?
(26) 2A: Men det är ju det som är problemet!
(27) 2B: Det är ju det som är problemet som sagt.

Student C i grupp 2 (17) reagerar på att problemet inte bestämmer om glasskulornas ordning har betydelse. Student 2B tolkar först problemet som att kulornas ordning saknar betydelse (18) (21). Efter respons från 2A (22) reflekterar hon och gör en ny tolkning som innebär att problemet inte bestämmer om kulornas ordning saknar betydelse eller ej. Interaktionen med 2A och 2C ingår i 2B:s situerade kontext. Alla i gruppen blir genom diskussionen medvetna om att det finns utrymme för flera olika tolkningar. Student 2C funderar på om man ska ge eleverna en tolkning eller lämna problemet öppet (25). De bestämmer sig inte för någon strategi, men visar att de är medvetna om att eleverna kommer möta detta tolkningsproblem (26) (27).

(28) 2C: Men som lärare då, så kompetensen här; man måste vara trevlig och glad (A och B skrattar) och inte attackera dem och påbörja lösningen åt dem. Då har man ju nästan ett matematiskt … om man inte får påbörja lösningen åt dem.
(29) 2A: Ja det är väl meningen att de ska försöka tänka själv.
(30) 2B: Om de sen fastnar någonstans, och det gör man ju alltid, så kan man ställa följdfrågor, men inte ge några svar. Leda dem in på andra vägar.
(31) 2A: Ja man ska inte visa lösningen för då har man löst problemet åt dem. Man måste på något sätt försöka gå bakvägen för att få dem att tänka själva.
(32) 2C: Ja man kanske ska presentera problemet och sen gå runt…
(33) 2B: Ja det är väl lättare.

Grupp 2 är i sin diskussion inne på att introduktionen måste lämna initiativet till eleverna (29). De tar upp att man inte ska påbörja eller visa lösningen (28) (31), och att man ska leda eleverna vidare utan att ge dem några svar (30). Studenterna är överens om att eleverna själva ska få bestämma hur de vill närma sig problemet. Deras roll som lärare blir att guida eleverna vidare när de fastnar i sina tankegångar.

(34) 2A: Att de får sitta i en liten grupp på tre kanske.
(35) 2B: Det är väl ett bra introduktionssätt till eleverna. Sitta gruppvis och sen bara rita upp fyra smaker på tavlan. De här har ni att välja på. På hur många olika sätt kan ni välja en glass.
(36) 2A: En glass!
(37) 2B: Två kulor. Det står ju inte att hon vill ha två olika smaker! Det står att hon vill ha två glasskulor.

Den kulturella kontexten är svår att se i gruppdiskussionen, av framförallt en orsak. Jag är själv en produkt av den kultur som studenterna befinner sig i och därför har jag svårt att se vad som markerar de normer och traditioner som jag tar för givna. Att 2B föreslår att de ska rita upp smakerna på tavlan ser jag som ett resultat av hennes kulturella kontext. Tavlan är en naturlig och självklar del av undervisningen i den svenska skolan oavsett om den är svart, grön eller vit. Student 2A föreslår grupparbete för 2B (34), som tycker det är en bra idé. I den här delen av diskussionen motiverar de inte vilka pedagogiska vinster ett grupparbete har i sammanhanget. Sedan upptäcker 2B att det inte är fastslaget att man måste ta olika smaker (37). Tillsammans har studenterna upptäckt att problemet varken bestämmer om kulornas ordning har betydelse (17) eller om det är tillåtet att ta samma smak två gånger (37). Studenternas möjlighet att diskutera med varandra är en del av deras situerade kontext. Interaktionen mellan studenterna ger dem möjlighet att ta del av nya infallsvinklar som de kan reflektera mot de tolkningar de redan gjort. Det var student 2C som först gjorde gruppen uppmärksam på att problemet inte bestämmer om kulornas ordning har betydelse och det var 2B som upptäckte att problemet inte bestämmer att det måste vara olika smaker. Senare återkommer de till grupparbete:

(60) 2A: Det blir svårt att hinna hjälpa alla på en 60 minuters lektion.
(61) 2B: Men om man delar in dem i grupper har man reducerat en del av problemet.
(62) 2C: Då kan de ju hjälpa varandra.
(63) 2B: Då kan man ta jättekluriga problem för det finns ju alltid någon som kommer på: Jamen så här kan man göra. Och så börjar de fundera och så kommer någon annan; så här då. Det är alltid någon som kommer på någon idé.

Här motiveras grupparbetet med att det leder till ett bättre utnyttjande av lärarens tid (61) och att eleverna kan ta del av varandras idéer och tillsammans klara svårare problem än de skulle klara på egen hand (63). En del av introduktionen är att arrangera en gynnsam lärandesituation för eleverna. Att placera eleverna i grupper gör att eleverna har möjlighet att, precis som grupp 2, tolka, diskutera och reflektera över sina tolkningar. Reflekterande leder till att de fördjupar, förändrar eller överger sin tidigare tolkning.

(39) 2B: Enas om tre kompetenser hos lärare som är nödvändiga för att undervisa matematik genom problemlösning.
Tystnad
(40) 2A: Att kunna tänka på två miljarder olika håll.
(41) 2B: Ja.
(42) 2A: Eller att kunna sätta sig in i hur eleverna tänker när de säger: Vi har kommit fram till att vi tror att de är det här därför att… och då gäller det att fatta hur de tänkte när de kom fram till sitt svar.
(43) 2B: Man måste ju verkligen förstå…
(44) 2A: Förstå sina elever.

I grupp 2 är A och B överens om att man måste ha förståelse för sina elevers kognitiva processer för att bedriva en undervisning som uppfyller målen (42) (43) (44). De har identifierat en del av kompetensen: Kunskap om eleverna. Under tiden ägnar sig student 2C åt att utforska problemet.

(45) 2B: Ja.
(46) 2B: En kompetens är att man ska försöka förklara så lätt som möjligt. När man väl förklarar för eleverna.
(47) 2A: Uhmm. Och tydligt.
(48) 2B: Och sen gärna kunna förklara det på tre miljoner olika sätt. Alla förstår ju inte första sättet man förklarar.
(49) 2A: Nej för det är ju det värsta som finns! En lärare som förklarar och så säger man jag fattar inte. Kan du ta det igen? Också säger han på exakt samma sätt en gång till. Det hjälper ju inte. Jag fattar ju fortfarande inte vad han säger för någonting.
(50) 2B: Nä, man måste ju verkligen kunna förklara i alla fall på tre sätt.

Här visar student 2A och 2B att de tycker det är viktigt att läraren beaktar att eleverna inte befinner sig i samma begreppliga kontext som läraren (48) (49). Även detta ingår i kompetensen: Kunskap om eleverna.

(80) 2C: Tänk om eleverna kommer fram till resultatet n över k bara genom att kolla på det.
(81) 2A: Aa just det! Ha, ha.
(82) 2A: Fast det passar nog på gymnasiet.
(83) 2C: Ja vi får ändra frågan. Vilka kompetenser måste eleverna ha.

Första delen av detta problem är mycket enkelt. I uppgiftsanalysen i avsnitt 4.4 finns exempel på hur elever i de tidiga åren löser problemet, utifrån sin tolkning, på ett par minuter. Student 2C har upptäckt att n över k är tillämpbar på problemet (80). Hon tolkar uppgiften i den begreppsliga kontext hon befinner sig i. 2A responderar på 2C och drar slutsatsen att problemet passar på gymnasienivå. Deras resonemang tyder på att de anser att de elever som ska arbeta med problemet måste ha ganska goda kunskaper i matematik (82) (83).

5.3 Grupp 3

Nu ska vi gå över till grupp 3 som sätter sig in i problemet:
(97) 3B: Jag tycker vi ska ta tre olika fall. Det finns olika möjligheter.
(98) 3A: Det är som att gå ut och äta. Ska man ha varmrätten först eller kallrätten eller efterrätten.

(99) 3B: Men då blir det fyra kulor…16 fall. Fyra upphöjt i två är sexton. Men här ingår inte om det är samma smak.
(100) 3C: Jo.
(101) 3C: Är vi överens då…
(102) 3A: om hur många olika sätt…
(103) 3B: Ja
(104) 3A: Jag känner mig lite tiltad där, jag menar … det var fyra eller hur … ta två.
(105) 3B: Men där har du inte, ta samma smak. *Tittar på uträkning på papper.*
(106) 3C: Nej precis.
(107) 3A: Nej ok vi skulle ha två av varje också.
(108) 3B: Men samtidigt kan man tro att man inte ska ha två av samma smak.
(109) 3B: N är fyra och två är … kanske kan man ta en halv jordgubb…
(110) 3A: Det är jobbigt det här. Man kan blanda två smaker.
(111) 3B. Men den andra stämmer också så vi har fyra av två och sen fyra gånger tre… *A bryter in.*
(112) 3A: Speciellt om det är en klass… *B bryter in.*
(113) 3B: Så du har tolv möjligheter.
(114) 3A: Det är hur hårt man tolkar det här.
(115) 3C: Det står inte att hon vill ha två olika sorter.
(116) 3B: Men vi ska förklara för barnen. De kommer att fråga: Kan man välja samma smak?

Grupp 3 lägger stor vikt vid att förstå problemet. De ser genast att det finns flera möjligheter att tolka uppgiften. Student 3B talar om tre olika möjligheter (97). I diskussionen berör de tolkning A: Varje smak kan väljas högst en gång till varje strut men kulornas ordning saknar betydelse (104), som ger 6 möjligheter; tolkning C: Varje smak kan väljas högst en gång och kulornas ordning har betydelse (111) (113) som ger 12 möjligheter och tolkning D: Varje smak kan väljas flera gånger till varje strut och kulornas ordning har betydelse (99). Studenternas begreppsliga kontext påverkar tolkningarna av problemet. De tänker kombinatorik (99) (104) (111). Student 3B lyfter med uttalande (116) frågan om hur man ska hantera de olika tolkningarna inför eleverna men hon får ingen respons av 3A och 3C.

Grupp 3 har börjat diskutera vilka kompetenser en lärare bör ha för att undervisa matematik genom problemlösning:

(148) 3B: Vad sa vi nu. Att tala högt. Att förklara vad problemlösning är.
(149) 3A: Kan man klämma till med att man ska vara entusiasmerande.
(150) 3C: Det är just det att jag tycker inte man ska ge så mycket exempel… *B bryter in*
(151) 3B: Man förklarar problemlösning och sen kan man skriva ett problem på tavlan och se hur det går.
(152) 3A: Man ska vara inbjudande som lärare, kanske. Är det en kompetens?
(153) 3B: Man låter barnen göra vårt jobb.
(154) 3A: Delta i alla fall.
(155) 3A: Duktig i musik behöver man väl vara. Är inte det en kompetens?
(156) 3C: Att man själv kan se problem från olika håll.
(157) 3A: Openminded, eller vad säger man.

Studenterna i grupp 3 har olika infallsvinklar på frågan om lärarkompetenser. Student A koncentrerar sig på personliga egenskaper som förmåga att entusiasmera (149), vara inbjudande (152) och musikalisk (155). Student B koncentrerar sig på undervisningstekniska detaljer (148) (151). Student C försöker leda in diskussionen i en annan riktning men får inte gehör (150). Hon tycker inte att man ska ge så många exempel, men ingen responderar på hennes inlägg så hon får ingen möjlighet att utveckla sina tankar. Hon tar även upp att det är viktigt att kunna se problem från olika håll (156).

Gruppen talar vidare om kompetenser. Student B tycker att förmågan att tala högt är mycket viktigt. Student A tycker att människor som alltid talar högt är jobbiga. Student C håller inte med om att förmågan att tala högt är en kompetens. Hon försöker få sina gruppkamrater att fokusera på lärare i allmänhet. Det är tydligt att studenterna har olika tolkningar av ordet kompetens. Jag sticker in replik med syftet att fokusera diskussionen.

Jag: Om man säger så här då. Vilka är de tre viktigaste sakerna som ni hoppas få med er ut från lärarutbildningen för att bli bra lärare.
(182) 3B: Motivation. Hur man motiverar sig själv och eleverna. Det är det viktigaste.
Jag: Så då skulle det räcka att gå en kurs i hur man motiverar sig själv och andra för att bli en bra lärare?
(183) 3B: Nej för motivation är brett. Jag märker när jag undervisar i språk att eleverna tappar motivationen snabbt om det inte är roligt. Det är säkert samma i varje ämne. Man behöver fantasi att hitta på nya roliga saker.

Här seglar förmågan att motivera sig själv och eleverna upp som den, enligt student 3B, viktigaste kompetensen en lärare kan ha (183). Det är en del av kompetensen undervisningskunskap.

(185) 3B: Men man märker här på högskolan också när man har varit på olika undervisning. Man går och hoppas att man ska lära sig någonting, men det händer inte; det som man förväntar sig.
Jag: Vad förväntar du dig?
(186) 3A: Jag tänkte på en kurs till exempel i matematik. Vi har diskuterat flera personer. Vi skulle önska oss att vi kunde lära oss hur vi ska lära ut. Till exempel för klass nio. Jag skulle vilja bli stark på kunskapen för klass nio. Javisst är det bra att ha lite mera högre upp men jag ska inte lära mig massa andra saker som är bra för mig. I slutet är det inte på den nivån som jag kommer undervisa. Jag vill vara 200 % säker på matematiken för årskurs nio. Hur jag ska undervisa.
(187) 3A: Så här skulle du vilja vara 200 % säker på problemlösning för årskurs nio?
(188) 3B: Ja i B blocket. Sen nästa nivå skulle vara hur man undervisar i gymnasiet.

Det är tydligt att student B inte får vad hon förväntar sig av matematikkurserna på lärarutbildningen (185) (186). Kanske är det elevperspektivet som saknas. Att omsätta matematiken så att den blir begriplig i elevernas kontext. Kanske önskar 2B att hon försågs med ett batteri av förklaringsmodeller under utbildningen. Ordvalet att vara 200 % säker på matematiken är svårtolkat. En möjlig tolkning är att student 2B ägnar mycket tid åt att öva upp sin räkneskicklighet men saknar grundläggande förståelse för de matematiska sambanden. En annan är att hon tycker det är slöseri med tid att lära sig områden av matematiken som hon inte kommer att undervisa i. Jag återkommer till student 3B:s missnöje i diskussionen.

Jag till C: Jag skulle vilja höra vad du tycker?
(189) 3C: Kommunikation, ämneskompetens och att man är positiv. Det tycker jag är de viktigaste kompetenserna.

Grupp 3 har inte kunnat enas om tre kompetenser som är nödvändiga för att undervisa matematik genom problemlösning. Student A lyfter fram personliga egenskaper som att det är viktigt att vara entusiasmerande (149) och inbjudande (152) som lärare. Student B framhåller egenskaperna att kunna tala högt (148) (164), förmåga att motivera (182) och förmåga att förklara genom att visa konkreta exempel (142)(146). Student C tycker att förmågan att kommunicera med sina elever, goda ämneskunskaper och en positiv inställning är de viktigaste kompetenserna (189).

6 Slutsatser

Analysen av studenternas gruppdiskussioner används här för att svara på mina frågeställningar, tillsammans med de teorier jag tidigare presenterat i avsnitt 2 och 3. En sammanvägning av slutsatserna används för att belysa syftet med arbetet.

6.1 Hur resonerar lärarstudenterna angående introduktionen av ett problem för eleverna?

Hur studenterna väljer att introducera problemet är beroende av hur de tolkar problemet. Majoriteten av studenterna i min undersökning vill introducera problemet genom att rita upp färgglada bilder av smakerna på tavlan. Tavlan är ett traditionellt inslag i svensk undervisning och studenternas kulturella kontext kan misstänkas ligga bakom att majoriteten vill använda den i introduktionen. Studenterna i grupp 2 når konsensus om att introduktionen inte får ta ifrån eleverna initiativet till hur de ska lösa problemet. De tycker att eleverna ska uppmuntras till att tänka själva och att lärarens roll är att guida eleverna genom lösningsprocessen. Studenterna i grupp 3 kommer aldrig fram till något gemensamt förslag på hur uppgiften ska introduceras. Åsikterna skiftar mellan att lämna problemet helt öppet att låta eleverna tolka och angripa som de vill eller att styra upp tolkningen av problemet och ge exempel på hur de ska angripa det.

Ingen av studenterna föreslog att problemlösningen skulle introduceras med en generell strategi för hur man löser problem. De talade inte heller om vilka kompetenser eleverna behöver för att klara problemet. Ingen nämnde Pòlya eller Schoenfeld. Strukturen i de begreppsliga ramverk som beskrivs av Pòlya och Schoenfeld skulle kunna hjälpa studenterna att fokusera sina diskussioner om hur problemet ska introduceras och vilka kompetenser som krävs för att undervisa matematik genom problemlösning.

6.2 Hur resonerar lärarstudenterna angående vilka kompetenser en lärare som ska undervisa i matematik genom problemlösning behöver?

Studenterna ger skilda svar. Gemensamt för studenterna i undersökningen är att de talar om lärarkompetenser som är nödvändiga för att genomföra undervisningen i klassrummet. Ingen tar upp god förberedelse och noggrant efterarbete, med reflektion över vad som fungerade bra respektive dåligt i undervisningssituationen.

Studenterna i grupp 1 i min undersökning har enats om tre kompetenser: Ett: Att man är bra och säker inom sitt ämne och kan förklara det man ska undervisa och kan svara på följdfrågor. Två: Tålamod, att försöka få alla elever att förstå och visa förståelse för elevernas kunskaper och frågor. Tre: Att presentera uppgifter på ett roligt sätt och använda exempel som är roliga och intressanta för elever och att ge bra ledtrådar när eleverna kör fast. De betonar att det är viktigt att vara lyhörd för elevernas kunskaper och frågor. De tar upp olika aspekter av matematisk kunskap, kunskap om studenterna och undervisningskunskap. I grupp 2 berörs kompetensen kunskap om eleverna ur flera aspekter. De diskuterar också hur de ska genomföra undervisningen så att eleverna får tänka själva, utan att läraren tar initiativet från dem. På så sätt tar de upp kompetensen undervisningskunskap, utan att kalla det undervisningskunskap. Kompetensen goda ämneskunskaper nämns inte. Grupp 3 har den spretigaste diskussionen om kompetenser. Student A lyfter fram personliga egenskaper som att det är viktigt att vara entusiasmerande och inbjudande som lärare. Student B framhåller egenskaperna att kunna tala högt, förmåga att motivera och förmåga att förklara genom att visa konkreta exempel. Student 3C tar upp goda ämneskunskaper, förmåga att kommunicera och att vara positiv.

Undersökningen har gett mig indikationer om att studenterna på lärarutbildningen inte har någon strukturerad bild över vilka kompetenser som behövs för att, mot målen i styrdokumenten, genomföra matematikundervisning i allmänhet och problemlösning i synnerhet.

6.3 Vilka tolkningar av problemet gör lärarstudenterna?

Hur studenterna tolkar problemet beror av i vilken kontext de tolkar problemet. Studenterna i de tre grupperna tolkar alla problemet i sin egen situerade kontext. Beroende av hur gruppdiskussionerna avlöper kan den första tolkningen förändras eller fördjupas. Grupp 1 tolkade uppgiften i en vardaglig kontext, d.v.s. så som det faktiskt går till när man köper glass enligt uppgiftsanalysen i avsnitt 4.4. Studenterna i grupp 2 blir genom en produktiv diskussion, där de tar del av varandras tolkningar, uppmärksamma på att problemet varken bestämmer om kulornas ordning har betydelse eller om det är tillåtet att välja samma smak två gånger. Avslutningsvis tillämpar de sitt aktuella begreppsliga ramverk, kombinatorik, på problemet och kommer fram till att problemet troligtvis passar bäst för gymnasieelever. Problemet är konstruerat så att det kan sysselsätta elever redan på förskolan, enligt avsnitt 4.4.1. Att studenterna anser att problemet passar bäst på gymnasienivå kan bero på att deras tankegångar har ’fastnat’ i deras aktuella begreppsliga ramverk. Även studenterna i grupp 3 ser de olika tolkningarna av problemet. De tolkar problemet i deras aktuella begreppsliga ramverk och tillämpar generella kombinatoriska regler för att lösa det.

Alla de tolkningar som studenterna gör kan även deras framtida elever göra. Deras tolkningar är beroende av i vilken kontext de tolkar problemet.

7 Diskussion

Hur vet man att man har tillräckliga kunskaper för att genomföra en undervisning som svarar mot Skolverkets mål? Svar: Det vet man inte (inlärningsparadoxen). Det enda man med säkerhet kan säga är att det inte går att kunna för mycket matematik eller för mycket pedagogik. Jag ska sträva efter att kontinuerligt förbättra mig som lärare genom att i all min undervisning reflektera över *hur, när* och *varför.* Problemlösning kommer vara ett regelbundet inslag i min undervisning.

Alla elever som upplever att matematikämnet saknar kreativitet behöver mer problemlösning i sin undervisning. Till alla blivande och praktiserande matematiklärare vill jag rekommendera en bok om problemlösning som heter *Rika matematiska problem – inspiration till variation* av Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). De som inte har upptäckt vilken potential problemlösning har, när det gäller att motivera eleverna, fördjupa deras begreppsförståelse och visa samband mellan matematiska områden, får genom boken ett färdigt material med rika problem att arbeta med.

De blivande lärarna behöver under sin utbildning träna sig i att både lösa matematiska problem och undervisa matematik genom problemlösning. En god matematisk kunskap är ingen garanti för att studenterna i framtiden kan genomföra en undervisning som svarar mot styrdokumentens mål. Inte heller goda pedagogiska kunskaper räcker för att genomföra en undervisning som svarar mot styrdokumentens mål. Det krävs både goda matematiska kunskaper och pedagogiska kunskaper, där didaktiska kunskaper och kunskap om elevernas lärprocesser ingår. Dessutom måste dessa kunskaper integreras till en sammanhängande helhet. När detta inte sker har vi en didaktiskt klyfta (Bergsten & Grevholm, 2004). Jag tror att en väg till ett brobygge över den didaktiska klyftan är att lärare och studenter regelbundet och återkommande under utbildningen diskuterar dess existens. Det ger studenterna verktyg att ställa krav på sin utbildning och på sin egen förmåga att reflektera över sammanhang.

En av studenterna i min undersökning tycker inte att innehållet i utbildningen motsvarar hennes förväntningar. Jag får uppfattningen att hon tycker att alltför stort fokus läggs på matematiska kunskaper och allt för lite på didaktiska kunskaper. Om jag har uppfattat henne rätt när hon säger ”Jag vill vara 200 % säker på matematiken för årskurs nio. Hur jag ska undervisa.” så tycker hon att det är tillräckligt att läraren kan den matematik som eleverna ska lära sig och att fokus i lärarutbildningen borde vara på hur man undervisar. Med ledning av hennes resonemang och mina egna erfarenheter från utbildningen menar jag att det saknas kunskap hos studenterna om vilka kunskaper och kompetenser en matematiklärare behöver och hur utbildningen är upplagd för att tillgodose dessa. En lärare behöver veta *hur, när* och *varför* i all sin undervisning (Ryve, 2006). Det är då rimligt att en lärarstudent vet *hur, när* och *varför* under sin utbildning.

I framtiden ser jag fram emot att ta del av en studie över hur matematikdidaktiska forskningsrön förvaltas ute i skolpraktiken. En god genomslagskraft visar att det är ekonomiskt försvarbart att satsa på forskning. Motsatsen skulle betyda att det är viktigt att utarbeta rutiner för hur man implementerar nyproducerad kunskap i skolorna. Det skulle också vara intressant att undersöka korrelationen mellan hur problemlösning används i undervisningen och resultat på nationella prov, utifrån hypotesen att elever som aktivt och regelbundet har arbetat med problemlösning presterar bättre än andra elever.

8 Referenser

Bergsten, C. & Grevholm, B. (2004). The didactic divide and the education of teachers of mathematics in Sweden. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 9, 123-144.

Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation.* Stockholm: Liber.

Halldén, O. (1999). Conceptual change and contextualisation. In W. Schnotz., S. Vosniadou., & M. Carretero (Eds.). *New perspektivs on Conceptual change* (pp. 53-65). London: Pergamon.

Halldén, O. (2002). Om att förstå, missförstå och inte förstå. Ett intentionellt perspektiv på inlärningssituationen. I Strömdahl, H. (red) *Kommunicera naturvetenskap i skolan – några forskningsresultat* (pp. 57-74). Lund: Studentlitteratur.

Halldén, O., Scheja, M., & Haglund, L. *The contextuality of knowledge: An intentional approach to meaning making and conceptual change.* Under tryckning.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1982). On the study of statistical intuitions. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: heuristics and biases* (pp. 495-508). New York: Cambridge University Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up – Helping children to learn mathematics.* Whashington, DC: National Academic Press.

Nilsson, P. (2006). *Exploring Probalistic Reasoning – A Study of How Students Contextulise Compound Change Encounters in Explorative Settings.* Växjö: Växjö University Press. Nr 103.

Pòlya, G. (1985 [1945]). *How to Solve It: a new aspect of mathematical mathod.* Princeton: Prinston University Press.

Ryve, A. (2006). *Approaching Mathematical Discourse: Two analytical frameworks and their ralation to problem solving interactions.* Västerås: Mälardalen University Press Dissertations. Nr 30.

Ryve,A. (2007). What is actually discussed in problem-solving courses for prospective teachers? *J Math Teacher Educ,* (10), 43-61. DOI 10.1007/s10857-007-9027-y

Scheja, M. (2006). Contextual variation and conceptual understanding in higher education. Paper presented at the SIG symposium on conceptual change, 14-17 May in Stockholm, Sweden.

Schoultz, J. (2002). Att utvärdera begreppsförståelse. I Strömdahl, H. (red) *Kommunicera naturvetenskap i skolan – några forskningsresultat* (pp.43-56). Lund: Studentlitteratur.

Shoenfeld, A.H. (1992). Learning to think matematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.) *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York, NY: MacMillan.

Skolverket (2000a). *Grundskolan – Kursplaner och betygskriterier 2000.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2000c). *Skolverkets föreskrifter om kursplaner och betygskriterier för kurser i ämnet matematik i gymnasieskolan och inom gymnasial vuxenutbildning.* SKOLFS 2000:5.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (2002). Naturvetenskap som arena för kommunikation. I Strömdahl, H. (red) *Kommunicera naturvetenskap i skolan – några forskningsresultat* (pp. 21-42). Lund: Studentlitteratur.

Säljö, Roger. (2003 [2000]). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv.* Stockholm: Prisma.